

7.38 : Equation réduite de la quadrique :

$$(E) \quad 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2zx + 4x - 2y - z + 3 = 0$$

(E) est donnée dans le repère orthonormé $(O, e) = (O, e_1, e_2, e_3)$. La forme quadratique

$\Phi(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2zx$ a pour matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres } e' = (e'_1, e'_2, e'_3).$$

Le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(X) = X(2-X)(X-3)$. On trouve :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}MP \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ est la matrice de passage de } e \text{ vers } e'.$$

Pour une matrice orthogonale, ie $P^{-1} = {}^tP$, donc $D = {}^tPMP$ sera la matrice de Φ dans e' . Ainsi, si l'on note $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ les coordonnées de $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans le repère (O, e') , notre quadrique s'écrit :

$$2y'^2 + 3z'^2 + 4\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'\right) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z'\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'\right) + 3 = 0$$

$$2y'^2 + 3z'^2 - \frac{8}{\sqrt{6}}x' + \frac{2}{\sqrt{2}}y' + \frac{5}{\sqrt{3}}z' + 3 = 0$$

en poursuivant :

$$-\frac{8}{\sqrt{6}}x' + 2\left(y' + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(z' + \frac{5}{6\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{37}{18} = 0$$

$$\underbrace{\left(x' - \frac{37\sqrt{6}}{144}\right)}_X - \underbrace{\left(y' + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}_{\frac{4}{\sqrt{6}}} - \underbrace{\left(z' + \frac{5}{6\sqrt{3}}\right)^2}_{\frac{8}{3\sqrt{6}}} = 0$$

$$\text{Posons } \begin{cases} x' = X + \frac{37\sqrt{6}}{144} \\ y' = Y - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ z' = Z - \frac{5}{6\sqrt{3}} \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = \frac{4}{\sqrt{6}} \\ b^2 = \frac{8}{3\sqrt{6}} \end{cases}$$

(E) aura pour équation $X - \frac{Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{b^2} = 0$ dans le repère $(\Omega, e'_1, e'_2, e'_3)$ où

Ω a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{37\sqrt{6}}{144} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{6\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ dans (O, e'_1, e'_2, e'_3) . Il s'agit d'une paraboloïde

elliptique (1 nappe) :

Formules de chgt de repère :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} \frac{37\sqrt{6}}{144} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{6\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

